

航空发动机材料疲劳可靠性试验设计

Fatigue Reliability Test Design of Aero-Engine Material

白国娟 曾海军 杨 坤 侯乃先 陈 健

/Bai Guojuan Zeng Haijun Yang Kun Hou Naixian Chen Jian

(中航商用航空发动机有限责任公司,上海 201108)

(AVIC Commercial Aircraft Engine CO., LTD., Shanghai 201108, China)

摘 要:

为了经济合理地进行航空发动机材料疲劳性能试验设计,并保证试验结果的“可比性”与“再现性”,根据 t 分布理论,按一定置信度和误差度要求,给出确定最少试件个数的判据;借助单侧容限系数,给出具有置信度的百分位值。

关键词:疲劳寿命;变异系数;单侧容限系数;置信度;可靠度

[Abstract] In order to achieve economic and rational fatigue test design, and to ensure the comparability and reproducibility of the test results, a criterion which is based on the t-distribution theory is provided to determine minimum number of test specimens. This criterion can also give percentage limits by one-sided tolerance factor k under a specific confidence level, reliability γ and error requirements.

[Key words] Fatigue Life; Variation Coefficient; One-sided Tolerance Factor; Confidence Coefficient; Reliability

0 引言

结构可靠性分析与设计要考虑很多重要的随机变量,如结构疲劳寿命、当量初始裂纹尺寸、材料断裂韧性等。工程上常常是通过试验(抽样)得到来自所研究随机变量的一组参差不齐的数据,即子样,子样来自不同的批次^[1]。然后对数据进行统计分析获得所需要的统计特性。

通常材料在给定载荷下的疲劳寿命分散性很大。因此,在进行试验测定时,首先就会碰到如何合理确定试件数量的问题。为了经济合理地进行疲劳性能试验设计,并保证试验结果的“可比性”与“再现性”,根据 t 分布理论,按一定置信度和误差度要求,给出确定最少试件个数的判据;借助单侧容限系数 k,给具有置信度的百分位值 γ 。

1 估计基值的最少试件个数判据

假定对数疲劳寿命和疲劳强度均遵循正态分布,根据 t 分布理论,按一定置信度和误差度要求,给出确定最少试件个数的判据。

1.1 估计基值的最少试件个数判据理论

正态母体基值 x_p 按以下概率表达式定义^[2]:

$$P(X > x_p) = \int_{(x_p)}^{\infty} f(x) dx = p \quad (1)$$

式中 $f(x)$ 是概率密度函数, $x_p = \mu + u_p \sigma$ 是对任一可靠度 p 值时的对数安全寿命或安全疲劳强度, μ 为母体平均值, σ 称为母体方差, u_p 称为与可靠度 p 相关的“标准正态偏量”。基值估计量是:

$$\bar{x}_p = \bar{\mu} + u_p \bar{\sigma}, \bar{\sigma} = k \hat{s} \quad (2)$$

$\bar{\mu}$ 称为子样平均值, $\bar{\sigma}$ 称为子样方差, k 称为“标准差修正系数”。

$$\hat{k} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (3)$$

由子样确定的基值 ($\bar{x}_p = \bar{\mu} + u_p \bar{\sigma}$), 以一定的概率发生在母体真值 ($x_p = \mu + u_p \sigma$) 的左右区间, 该区间随着观测值个数 n 增多而减小。在给定的置信度 γ 下, 确定使 \bar{x}_p 与 x_p 之间误差不超某一度时的最

少观测值个数 n 。首先, $\bar{x}_p = \bar{\mu} + u_p \bar{\sigma}$ 写成随机变量函数形式:

$$\xi = \bar{X} + u_p \hat{k} s_x \quad (4)$$

式中: \bar{X} 和 s_x 分别表示作为随机变量的子样平均值和子样标准差。假定 ξ 遵循正态分布。 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 和方差 $Var(\xi)$ 分别为

$$E(\xi) = \mu + u_p \sigma \quad (5)$$

$$Var(\xi) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1) \right] \quad (6)$$

标准正态变量:

$$U = \frac{\xi - E(\xi)}{\sqrt{Var(\xi)}} = \frac{(\bar{X} + u_p \hat{k} s_x) - (\mu + u_p \sigma)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}} \quad (7)$$

可知 t_x 变量为:

$$t_x = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} \quad (8)$$

将 U , χ^2 和 $\nu = n - 1$ 各值代入上式:

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{(\bar{X} + u_p \hat{k} s_x) - (\mu + u_p \sigma)}{\sqrt{\frac{(n-1)s_x^2}{(n-1)\sigma^2} \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}}} \\ &= \frac{(\bar{X} + u_p \hat{k} s_x) - (\mu + u_p \sigma)}{s_x \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}} \end{aligned} \quad (9)$$

在一次抽样中, t_x 的取值为

$$t = \frac{(\bar{x} + u_p \bar{\sigma}) - (\mu + u_p \sigma)}{s \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}} \quad (10)$$

当给定置信度 γ 和自由度 $\nu = n - 1$ 时, 可由 t 分布计算得 t_γ 值, 则 t 将以置信度 γ 位于 $-t_\gamma$ 和 t_γ 区间内:

$$-t_\gamma < \frac{(\bar{x} + u_p \bar{\sigma}) - (\mu + u_p \sigma)}{s \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}} < t_\gamma \quad (11)$$

经移项后, 即得百分位值的误差区间估计式:

$$\begin{aligned} \frac{t_\gamma s \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}}{\bar{x} + u_p \bar{\sigma}} &< \frac{(\bar{x} + u_p \bar{\sigma}) - (\mu + u_p \sigma)}{\bar{x} + u_p \bar{\sigma}} \\ &< \frac{t_\gamma s \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}}{\bar{x} + u_p \bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (12)$$

如以 δ 表示误差限度, 则有

$$\delta = \frac{t_\gamma s \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}}{\bar{x} + u_p \bar{\sigma}} \quad (13)$$

代入 $\bar{\sigma} = \hat{k} s$, δ 可表示为变异系数 s/\bar{x} 的函数:

$$\delta = \frac{t_\gamma (s/\bar{x}) \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)}}{1 + u_p \hat{k} (s/\bar{x})} \quad (14)$$

这时, 只要规定精度指标、置信度和可靠度, 便可计算出所需子样容量, 即试件数 n 。若取 $\delta = 5\%$ 可由上式给出变异系数 s/\bar{x} 、可靠度 p 、置信度 γ 和观测值 n 之间的关系式, 估计母体百分位值的最少试件个数判据:

$$s/\bar{x} \leq \frac{0.05}{t_\gamma \sqrt{\frac{1}{n} + u_p^2 (\hat{k}^2 - 1)} - 0.05 u_p \hat{k}} \quad (15)$$

s/\bar{x} 是通过试验由 n 个观测值计算出的。当 n 满足上式要求且不存在有系统误差时, 将 $\bar{x}_p = \bar{\mu} + u_p \bar{\sigma}$ 作为母体真值 x_p 的估量。以 γ 的置信度, 相对误差不超过 $\pm 5\%$ 。

1.2 变异系数与试验观测值的关系曲线

根据以上变异系数 s/\bar{x} 、可靠度 p 、置信度 γ 和观测值 n 之间的关系式给出不同情况下变异系数与试验观测值 n 的关系曲线。

图 1 给出不同置信度下试样个数和变异系数关系曲线图, 从图中可以得知, 当试验所测得结果的变异系数小时, 试样数少; 在变异系数相同的情况下, 置信度越大试验所需的试样个数越多。

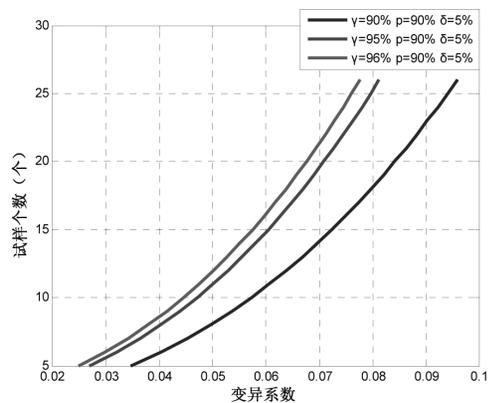


图 1 不同置信度下试样个数-变异系数曲线

图 2 给出不同误差下试样个数和变异系数关系曲线图, 从图中可以得知, 在变异系数相同的情况

下,误差限度越小,试验所需的试样个数越多。

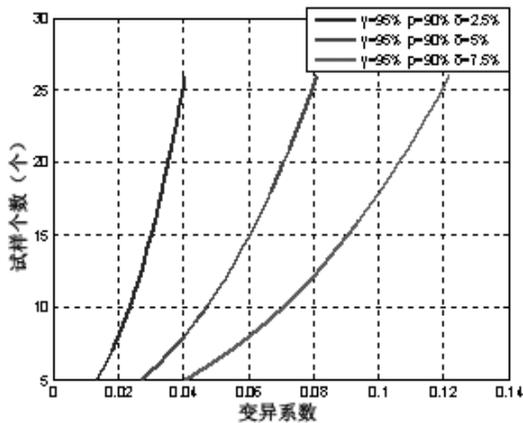


图2 不同误差下试样个数-变异系数关系曲线

图3给出不同可靠度下试样个数和变异系数关系曲线图,从图中可以得知,在变异系数相同的情况下,置信度越大试验所需的试样个数越多。

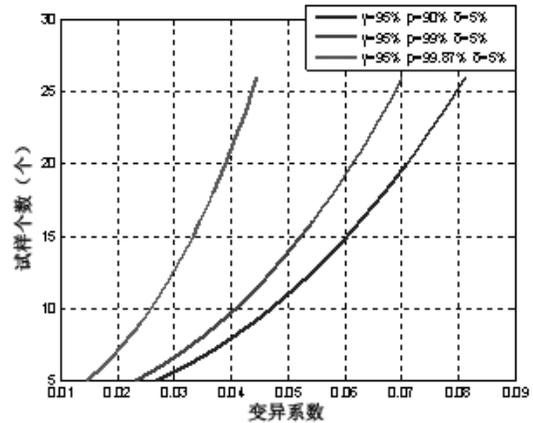


图3 不同可靠度下试样个数-变异系数关系曲线

综上可得:置信度愈高、可靠度愈高,误差越小,试验所需试样个数愈大。

1.3 变异系数与最少观测值个数对应表

为了便于应用,表1给出了计算A基值、B基

表1 95%置信度不同可靠度下变异系数与最少观测值个数对应表

置信度 $\gamma=95\%$	可靠度 $p=90\%$	误差 $\delta=5\%$	置信度 $\gamma=95\%$	可靠度 $p=99\%$	误差 $\delta=5\%$	置信度 $\gamma=95\%$	可靠度 $p=99.87\%$	误差 $\delta=5\%$
变异系数 s/\bar{x} 范围		最少观测值 个数	变异系数 s/\bar{x} 范围		最少观测值 个数	变异系数 s/\bar{x} 范围		最少观测值 个数
小于 0.026 88		5	小于 0.018 01		5	小于 0.014 54		5
0.026 88 ~ 0.032 00		6	0.018 01 ~ 0.021 54		6	0.014 54 ~ 0.017 41		6
0.032 00 ~ 0.036 42		7	0.021 54 ~ 0.024 58		7	0.017 41 ~ 0.019 89		7
0.036 42 ~ 0.040 33		8	0.024 58 ~ 0.024 58		8	0.019 89 ~ 0.022 09		8
0.040 33 ~ 0.043 87		9	0.027 28 ~ 0.029 71		9	0.022 09 ~ 0.024 07		9
0.043 87 ~ 0.047 11		10	0.029 71 ~ 0.031 94		10	0.024 07 ~ 0.025 88		10
⋮			⋮			⋮		
0.077 93 ~ 0.079 58		25	0.052 83 ~ 0.053 93		25	0.042 82 ~ 0.043 71		25
0.079 58 ~ 0.081 18		26	0.053 93 ~ 0.055 00		26	0.043 71 ~ 0.044 58		26
大于 0.081 18		27	大于 0.055 00		27	大于 0.044 58		27

值、 -3σ 基值时试样个数 n 与变异系数 s/\bar{x} 的对应关系表。

A基值——在母体中至少有99%的数值等于或超过力学性能设计许用值,其置信度为95%。

B基值——在母体中至少有90%的数值等于或超过力学性能设计许用值,其置信度为95%。

-3σ 基值——在母体中至少有99.87%的数值等于或超过该力学性能设计许用值,其置信度为95%。

在进行疲劳试验时,如果在试验前已知变异系数, s/\bar{x} 可以根据要求的精度 δ 、置信度 γ 和可靠度 p , 可以用式(16)解出所需子容量,即试件数 n 。如

果变异系数 s/\bar{x} 未知,则可先进行一定次数的试验,用试验得到的变异系数然后用下式计算所需子容量的估计值,据此可以判断已经进行的试验次数是否足够。

$$n = \frac{1}{\left(\frac{\delta \times (1 + u_p \cdot k(s/\bar{x}))}{t_\gamma(s/\bar{x})} \right)^2 - u_p^2 (k^2 - 1)} \quad (16)$$

2 单侧容限系数法

按上面的估计基值的最少试件个数判据所述,欲使测定出的百分位值具有一定的置信度,必须保证有足够的试件。实际上,往往只用5~6个试验

件。当试件个数 n 不能满足估计基值的最少试件个数判据的要求时,则可借助单侧容限系数 k 给具有置信度 γ 的百分位值。

2.1 单侧容限系数理论

单侧容限系数 k 的作用是取代 $(\bar{\mu}+u_p\bar{\sigma})$ 中的 u_p , 使有 $(\bar{\mu}+k\bar{\sigma})$ 估计出百分位值小于真值 $(\mu+u_p\sigma)$ 的概率 γ , 以此 γ 定义为百分位置的置信度。如取 $\gamma=95\%$, 则意味着: 经 100 次抽样估计出的 100 个 $(\bar{\mu}+u_p\bar{\sigma})$ 值, 其中 95 个都小于 $(\mu+u_p\sigma)$ 。这样, 将 $(\bar{\mu}+u_p\bar{\sigma})$ 作为 $(\mu+u_p\sigma)$ 的估计量时, 就具有 95% 的置信度。

$$k = \frac{u_p - u_\gamma \sqrt{\frac{1}{n} \left[1 - \frac{u_\gamma^2}{2(n-1)} \right] + \frac{u_p^2}{2(n-1)}}}{1 - \frac{u_\gamma^2}{2(n-1)}} \quad (17)$$

u_γ 是置信度为 γ 的标准正态偏差, u_p 是概率为 p 的标准正态偏差。

当已知与可靠度 p 相关的标准正态偏差 u_p 、置信度 γ 相关的标准正态偏差 u_γ 以及观测个数 n , 可由上式计算出单侧容限系数 k 值, 从而按式

$$\bar{x}_p = \bar{\mu} + k\bar{\sigma} \quad (18)$$

求得具有置信度的百分位值。

2.2 单侧容限系数与试样个数关系曲线

从图 4 可以得知, 随着试样个数的增加, 单侧容

限系数趋于一个恒定的值, 这样随着试样个数的增大计算所得的设计许用值越接近于试样个数无限大时的设计许用值, 材料性能数据更能表征材料真实性能。从图 4 也可看出置信度越高, 单侧容限系数绝对值越大; 可靠度越大, 单侧容限系数绝对值越大, 所以置信度、可靠度要求越高, 所测性能基值就越小。但是考虑试验成本、试验条件等因素, 希望能用少的试样试验结果最大限度的表征材料的真实性能, 所以要根据实际情况选择合适的试样个数。

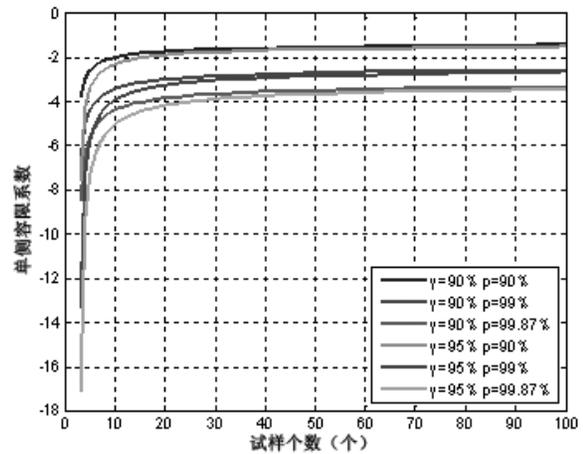


图 4 不同可靠度和置信度下试样个数-单侧容限系数曲线

2.3 试样个数与单侧容限系数对应关系表

表 2 给出了不同置信度、不同可靠度下试样个数与单侧容限系数 k 的对应关系表。

表 2 不同置信度和可靠度下单侧容限系数与观测个数对应表

试样大小 n	95% 置信度的 k 值			90% 置信度的 k 值		
	存活率 p			存活率 p		
	90%	99%	99.87%	90%	99%	99.87%
5	-3.381	-5.750	-7.347	-2.586	-4.401	-5.623
6	-2.962	-5.025	-6.415	-2.378	-4.048	-5.172
7	-2.711	-4.595	-5.865	-2.242	-3.820	-4.881
8	-2.541	-4.307	-5.497	-2.145	-3.659	-4.676
9	-2.416	-4.099	-5.231	-2.071	-3.538	-4.522
10	-2.321	-3.940	-5.030	-2.012	-3.442	-4.401
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	-1.812	-3.121	-3.995	-1.676	-2.911	-3.733
27	-1.800	-3.101	-3.971	-1.667	-2.897	-3.716
28	-1.788	-3.083	-3.948	-1.659	-2.885	-3.701
29	-1.777	-3.066	-3.927	-1.651	-2.873	-3.686
30	-1.767	-3.050	-3.907	-1.644	-2.862	-3.672

3 结论

根据 t 分布理论,按一定置信度和误差度要求,给出确定最少试件个数的判据。在进行疲劳试验时,可以先进行少数试验然后根据最少试件个数判据确定试验试样是否足够,如果不满足最少试件个数判据则继续试验直至满足最少试件个数判据。如果考虑经济问题,时间成本,并且试件个数 n 不满足估计基值的最少试件个数判据的要求时,则可借助单侧容限系数 k ,给具有置信度 γ 的百分位值。

(上接第 31 页)

析方法得到的系统失效概率过于保守,鉴于计算的精度,应当采用 MA 分析进行建模计算,以确保系统失效的发生概率满足最低的安全要求。

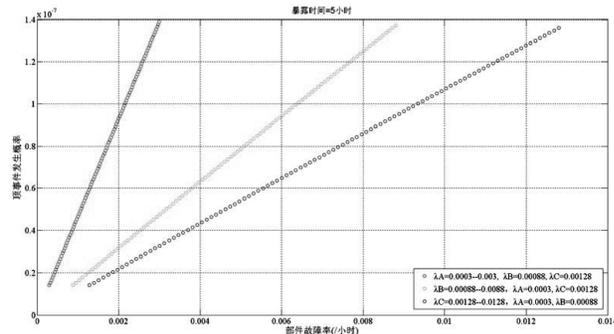


图 6 基于 FTA 方法得到的部件失效率的变化对顶事件发生概率的影响

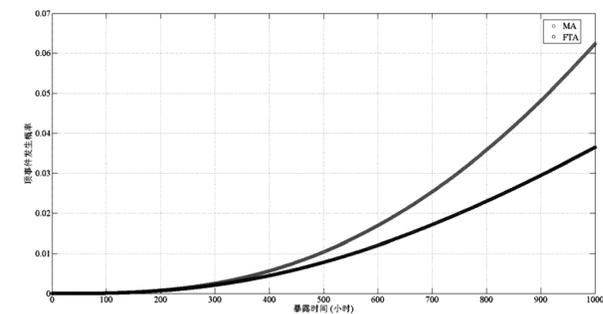


图 7 基于 FTA 与 MA 方法分析潜在失效系统的发生概率随暴露时间的变化

4 结论

本文系统研究了故障树分析与马尔科夫分析在发动机系统安全性评估中的应用时机,研究结论有:

(1) 对于所研究的系统,若 $\lambda * t$ 较小(一般小于 10^{-2}), 则可以采用 FTA 或 MA 方法对系统展开

最少试件个数的判据法和单侧容限系数法,可以节省试验中大量试验件,减少试验成本。

参考文献:

- [1] Federal Aviation Administration. Metallic Materials Properties Development and Standardization (MMPDS). April 2011.
- [2] 高镇同,熊峻江. 疲劳可靠性[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2000.

安全性分析,并可以得到相同的分析结果,其中包括系统的失效概率以及部件的重要度;若 $\lambda * t$ 较大(一般大于 10^{-2}),则应当采用 MA 方法展开分析,若采用 FTA 方法处理这类问题将会导致计算结果过于保守,很难准确的反映系统的安全性。

(2) 通过对部件重要度的定量分析,可以得到相关的维修任务,比如维修的优先顺序,系统设计的薄弱环节等信息。

通过对安全性分析方法的系统研究表明,MA 方法与传统的静态 FTA 方法相比,能够更加精确的反映失效顺序相关系统的安全特征。该方法将在发动机系统安全性评估中有非常大的应用前景和优势。

参考文献:

- [1] AC33. 75 - 1A. GUIDANCE MATERIAL FOR 14CFR § 33.75. SAFETY ANALYSIS [G]. 2007. 9.
- [2] SAE ARP4761. The Society of Automotive Engineering. Aerospace Recommended Practice; Guideline and Methods for Conducting the Safety Assessment Process on Civil Airborne Systems and Equipment[S]. U. S. , 1996, 12.
- [3] 赵廷弟. 安全性设计分析与验证[M]. 北京:国防工业出版社, 2011; 158- 159.
- [4] 罗云林,张巨联,杨剑忠. 基于马尔科夫方法的飞控系统安全性评估[J]. 中国民航大学学报, 2011, 4: 16-19.
- [5] Y. Ren, J. B. Dugan. , Design of Reliable Systems Using Static & Dynamic Fault Tree [J]. IEEE Trans on Reliability, 1998, 47 (3): 234- 244.
- [6] 朱正付,李长福,等. 基于马尔科夫链的动态故障树分析方法[J]. 兵工学报, 2008: 1104-1107.